

MECÁNICA
DE MATERIALES

JAMES M. GERE • BARRY J. GOODNO

OCTAVA EDICIÓN

Mecánica de materiales

Octava edición



Mecánica de materiales

Octava edición

James M. Gere
Profesor Emérito, Stanford University

Barry J. Goodno
Georgia Institute of Technology

Traducción:

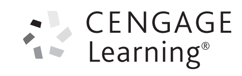
Lorena Peralta Rosales
María del Pilar Carril Villarreal

Traductoras profesionales

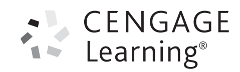
Revisión técnica:

José Nicolás Ponciano Guzmán

Instituto Tecnológico de Morelia
Tecnológico de Monterrey,
Campus Morelia



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Mecánica de materiales
Octava edición
James Gere, Barry J. Goodno

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Javier Reyes Martínez

Diseño de portada:
Estúdio Bistrô

Imágenes de portada:
©Shutterstock

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Traducido del libro
Mechanics of materials
Eight edition
James Gere, Barry J. Goodno
Publicado en inglés por Cengage Learning © 2013
ISBN: 978-1-111-57773-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Gere, James; Goodno, Barry J.
Mecánica de materiales
Octava edición

ISBN: 978-607-522-281-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 19 18 17 16

CONTENIDO

1

CAPÍTULO

Tensión, compresión y cortante



Esta torre de telecomunicaciones es un conjunto de muchos elementos que trabajan principalmente en tensión y compresión. (Peter budella/Shutterstock)

PERSPECTIVA GENERAL DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presenta una introducción a la mecánica de materiales, que analiza los **esfuerzos**, las **deformaciones unitarias** y los **desplazamientos** en barras de diferentes materiales sometidas a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales. Tras un breve repaso de los conceptos básicos de la estática, aprenderemos acerca del **esfuerzo normal** (σ) y la **deformación unitaria normal** (ε) en materiales empleados en aplicaciones estructurales; luego identificaremos las propiedades clave de diversos materiales, como el módulo de elasticidad (E), fluencia (σ_y) y esfuerzos de ruptura (σ_u), a partir de gráficas del esfuerzo (σ) en función de la deformación unitaria (ε). También graficaremos el esfuerzo cortante (τ) en función de la deformación unitaria por esfuerzo cortante (γ) e identificaremos el coeficiente de elasticidad en cortante (G). Si estos materiales sólo se desempeñan en el modo elástico, el esfuerzo y la deformación unitaria están relacionadas por la ley de Hooke para esfuerzo normal y deformación unitaria normal ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), y también para el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante ($\tau = G \cdot \gamma$). Veremos que los cambios en las dimensiones laterales y en el volumen dependen de la relación de Poisson (ν). De hecho, las propiedades de los materiales E, G y ν, están directamente relacionadas entre sí y no son propiedades independientes del material.

El ensamblaje de barras para formar estructuras (como armaduras) nos lleva a considerar los esfuerzos cortante promedio (τ) y de aplastamiento (σ_b) en sus uniones, así como los esfuerzos normales que actúan sobre el área neta de la sección transversal (si está en tensión) o sobre toda el área de la sección transversal (si está en compresión). Si restringimos los esfuerzos máximos en cualquier punto a valores **permisibles** mediante el uso de factores de seguridad, podemos identificar los niveles permisibles de las cargas axiales para sistemas simples, como cables y barras. Los **factores de seguridad** relacionan la resistencia real con la requerida de los elementos estructurales y toman en consideración una variedad de incertidumbres, como variaciones en las propiedades del material y la probabilidad de una sobrecarga accidental. Por último, consideraremos al **diseño**, que es el proceso iterativo mediante el que se determina el tamaño apropiado de los elementos estructurales para cumplir con diversos requisitos tanto de **resistencia** como de **rigidez** para una estructura en particular sometida a una variedad de cargas diferentes.

El capítulo 1 está organizado de la siguiente manera:

1.1 INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE MATERIALES

La **mecánica de materiales** es una rama de la mecánica aplicada que trata del comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a diversas cargas. Otros nombres para este campo de estudio son *resistencia de materiales* y *mecánica de los cuerpos deformables*. Los cuerpos sólidos que se consideran en este libro incluyen barras sometidas a cargas axiales, ejes en torsión, vigas en flexión y columnas en compresión.

El objetivo principal de la mecánica de materiales radica en determinar los esfuerzos, deformaciones unitarias y desplazamientos en estructuras y sus componentes, causadas a las cargas que actúan sobre ellas. Si podemos determinar estas cantidades para todos los valores de las cargas, incluyendo las que causan la falla, tendremos una representación completa del comportamiento mecánico de esas estructuras.

Comprender el comportamiento mecánico resulta esencial para el diseño seguro de todo tipo de estructuras, ya sean aeroplanos y antenas, edificios y puentes, máquinas y motores o barcos y naves espaciales. Es por esta razón que la mecánica de materiales es una disciplina básica en muchos campos de la ingeniería. La estática y la dinámica también son esenciales, pero estos temas tratan principalmente con las fuerzas y movimientos asociados con partículas y cuerpos rígidos. En la mecánica de materiales, la mayoría de los problemas comienza con un examen de las fuerzas internas y externas que actúan sobre un cuerpo deformable estable. Primero se definen las cargas que actúan sobre el cuerpo, junto con sus condiciones de soporte, luego se determinan las fuerzas de reacción en los soportes y las fuerzas internas en los elementos que lo componen, utilizando para ello las leyes fundamentales del equilibrio estático (siempre que sea isostático). Para realizar el análisis estático apropiado de una estructura, resulta esencial un diagrama de cuerpo libre bien elaborado.

En la mecánica de materiales, vamos un paso más allá de los conceptos expuestos en la estática, hasta analizar los esfuerzos y deformaciones unitarias dentro de cuerpos reales; es decir, cuerpos de dimensiones finitas que se deforman con cargas. Para determinar los esfuerzos y deformaciones unitarias se utilizan las propiedades físicas de los materiales, así como numerosas leyes y conceptos teóricos. Más adelante se verá que la mecánica de materiales proporciona mayor información esencial con base en las deformaciones del cuerpo, lo cual permite resolver los problemas llamados estáticamente indeterminados (lo que no es posible si sólo se emplean las leyes de la estática).

Los análisis teóricos y resultados experimentales desempeñan papeles igualmente importantes en la mecánica de materiales. Se emplean teorías para deducir fórmulas, y ecuaciones para predecir el comportamiento mecánico, pero esas expresiones no se pueden usar en un diseño práctico, a menos que se conozcan las propiedades físicas de los materiales. Esas propiedades se conocen sólo después de que se han efectuado experimentos cuidadosos en el laboratorio. Además, no todos los problemas prácticos facilitan al análisis teórico, y en esos casos son necesarias las pruebas físicas.

El desarrollo histórico de la mecánica de materiales es una mezcla fascinante, tanto de teoría como de experimentación; la teoría ha señalado el camino para obtener resultados útiles en algunos casos y en otros lo ha hecho la experimentación. Algunos personajes famosos, como Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642), realizaron experimentos para determinar la resistencia de alambres, barras y vigas, si bien no desarrollaron teorías adecuadas (respecto a las normas actuales) para explicar los resultados de sus pruebas. En contraste, el famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló la teo-

ría matemática de las columnas, y en 1744 calculó la carga crítica de una columna, mucho antes que existiera alguna evidencia experimental que demostrara la importancia de sus resultados. Sin ensayos apropiados para apoyar sus teorías, los resultados de Euler permanecieron sin usar durante más de cien años, aunque en la actualidad constituyen la base del diseño y análisis de la mayoría de las columnas.*

Problemas

Al estudiar la mecánica de materiales, descubrirá que el tema se divide de manera natural en dos partes: la primera, en comprender el desarrollo lógico de los conceptos, y la segunda, aplicar estos conceptos a situaciones prácticas. Lo primero se logra estudiando las deducciones, explicaciones y ejemplos que aparecen en cada capítulo, y lo segundo se logra resolviendo los problemas de final de capítulo. Algunos de los problemas son de carácter numérico y otros son simbólicos (o algebraicos).

Una ventaja de los *problemas numéricos* es que las magnitudes de todas las cantidades son evidentes en cada etapa de los cálculos, lo que permite observar si los valores son o no razonables. La ventaja principal de los *problemas simbólicos* es que conducen a fórmulas de propósito general. Una fórmula presenta las variables que afectan los resultados finales; por ejemplo, en la solución es posible cancelar una cantidad, un hecho que no sería evidente en una solución numérica. Además, una solución algebraica muestra la manera en que cada variable afecta los resultados, como cuando una variable aparece en el numerador y otra en el denominador. Además, una solución simbólica permite comprobar las dimensiones en cada etapa del trabajo.

Por último, la razón más importante para resolver problemas de manera algebraica es obtener una fórmula general que se pueda emplear para muchos problemas distintos. En contraste, una solución numérica sólo se aplica a un conjunto de circunstancias. Como los ingenieros deben ser expertos en las dos clases de soluciones, usted encontrará una mezcla de problemas numéricos y simbólicos en todo el libro.

Los problemas numéricos requieren trabajar con unidades específicas de medida. Con base en la práctica actual de la ingeniería moderna, en este libro se utiliza tanto el Sistema Internacional de unidades (SI) como el sistema inglés (que se acostumbra en Estados Unidos). En el apéndice B se proporciona una descripción de ambos sistemas, donde también se encuentran muchas tablas útiles, incluida una de factores de conversión.

Todos los problemas se localizan al final de los capítulos con sus números respectivos y los números subsiguientes identifican las secciones a las que pertenecen. En el caso de los problemas que requieren soluciones numéricas, los impares se plantean en unidades inglesas y los pares en unidades del SI.

En el apéndice C se describen con detalle las técnicas para resolver problemas, además de una lista de procedimientos ingenieriles sólidos. Además, este apéndice incluye secciones sobre homogeneidad dimensional y cifras significativas. Estos temas son especialmente importantes, debido a que cada ecuación debe ser homogénea dimensionalmente, y cada resultado numérico debe expresarse con el número adecuado de dígitos significativos. En este libro los resultados numéricos finales, en general, se presentan con tres dígitos significativos, cuando un número inicia con los dígitos 2 a 9, y con cuatro dígitos significativos cuando un número inicia con el dígito 1. Con frecuencia los valores intermedios se registran con dígitos adicionales para evitar perder precisión, debido al redondeo de cifras.

*La historia de la mecánica de materiales, iniciando con Leonardo da Vinci y Galileo Galilei, se encuentra en las referencias 1.1, 1.2 y 1.3.

1.2 REPASO DE ESTÁTICA

En su curso previo de estática usted estudió el *equilibrio* de los cuerpos rígidos sometidos a gran variedad de distintas fuerzas o sujetos, de tal modo que el cuerpo quedaba estable y en reposo. En consecuencia, un cuerpo sujeto de forma apropiada no puede emprender movimiento de cuerpo rígido, debido a la aplicación de fuerzas estáticas. Usted trazó *diagramas de cuerpo libre* de todo el cuerpo, o de sus partes más importantes, y luego aplicó las *ecuaciones de equilibrio* para calcular las fuerzas y momentos de reacción externos o las fuerzas y momentos internos en puntos críticos. En esta sección se repasarán las ecuaciones básicas del equilibrio estático, y luego se aplicarán a la solución de estructuras de ejemplo (tanto bi como tridimensionales) utilizando operaciones escalares y vectoriales (suponiendo que tanto aceleración como velocidad son iguales a cero). La mayoría de los problemas en mecánica de materiales requiere que el primer paso sea un análisis estático, de manera que se conozcan todas las fuerzas que actúan sobre el sistema y causan su deformación. Una vez identificadas todas las fuerzas externas e internas de interés, en los siguientes capítulos podremos continuar con la evaluación de tensiones, deformaciones unitarias y alteraciones de barras, ejes, vigas y columnas.

Ecuaciones de equilibrio

La fuerza resultante R y el momento resultante M de *todas* las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo en equilibrio, sea rígido o deformable, son iguales a cero. La suma de los momentos se puede tomar sobre cualquier punto arbitrario. Las ecuaciones de equilibrio resultantes se pueden expresar en *forma vectorial* de la siguiente manera:

$$R = \sum F = 0 \tag{1.1}$$

$$M = \sum M = \sum (r \times F) = 0 \tag{1.2}$$

donde F es uno de los varios vectores de fuerza que actúan sobre el cuerpo y r es un vector de posición que va desde el punto en el que se toman los momentos hasta un punto a lo largo de la línea de aplicación de cualquier fuerza F. A veces resulta conveniente escribir las ecuaciones de equilibrio en su *forma escalar*, utilizando un sistema de coordenadas cartesiano, ya sea bidimensional (x, y) o tridimensional (x, y, z), de la siguiente forma

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \tag{1.3}$$

La ecuación (1.3) se puede utilizar para problemas bidimensionales o problemas en un plano, pero en tres dimensiones se requieren tres ecuaciones de fuerza y tres de momento:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \tag{1.4}$$

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \tag{1.5}$$

Si el número de fuerzas desconocidas es igual al número de ecuaciones de equilibrio independientes, dichas ecuaciones son suficientes para encontrar todas las fuerzas de reacción o internas desconocidas que actúan sobre el cuerpo, y el problema se conoce como *estáticamente determinado*. Si el cuerpo o estructura está forzado por soportes adicionales (o redundantes), el problema es *estáticamente indeterminado* y no es posible resolverlo utilizando sólo las leyes del equilibrio estático. Con las estructuras estáticamente indeterminadas, también debemos examinar las deformaciones estructurales, como se estudiará en los siguientes capítulos.

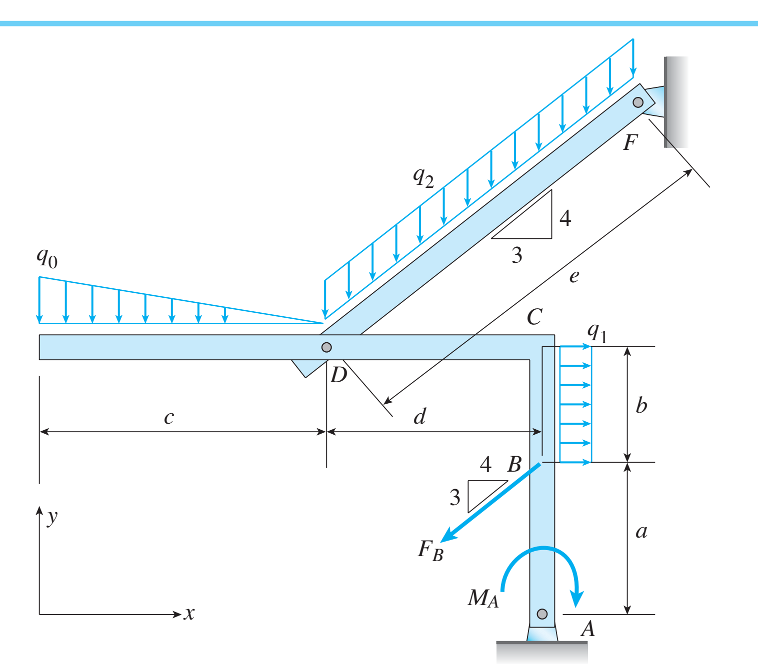


Figura 1.1
Estructura de armadura plana

Fuerzas aplicadas

Las cargas externas que se aplican a un cuerpo o estructura pueden ser fuerzas o momentos concentrados o distribuidos. Por ejemplo, la fuerza F_B (en unidades de libras, lb; o newtons, N) de la figura 1.1 es una carga puntual o concentrada y se supone que actúa en el punto B del cuerpo, mientras que el momento M_A es un momento o par concentrado (en unidades de lb-ft o N · m) que actúan en el punto A. Las fuerzas distribuidas pueden actuar solas o en forma paralela a un elemento y tener una intensidad constante, como la carga lineal q_1 al elemento BC (figura 1.1) o la carga lineal q_2 que actúa en la dirección $-y$ sobre el elemento inclinado DF; tanto q_1 como q_2 tienen unidades de intensidad de fuerza (lb/ft o N/m). Las cargas distribuidas también pueden tener una variación lineal (u otra) con alguna intensidad pico q_0 (como sobre el elemento ED en la figura 1.1). Las presiones superficiales p (con unidades lb/ft^2 o Pa), como sería el viento que actúa sobre la superficie de un anuncio (figura 1.2), se desarrollan sobre una región designada del cuerpo. Por último, una fuerza de volumen w (con unidades de fuerza por unidad de volumen: lb/ft^3 o N/m^3), como es el propio

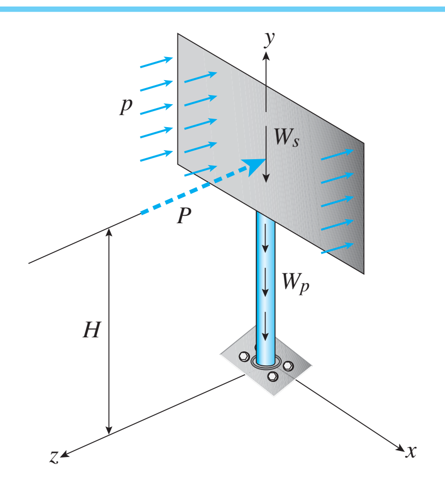


Figura 1.2
Viento sobre un anuncio

peso distribuido del anuncio o poste de la figura 1.2, actúa por todo el volumen del cuerpo y la podemos reemplazar por el componente peso W actuando en el centro de gravedad (c.g.) del anuncio (W_s) o poste (W_p). De hecho, es posible reemplazar toda carga distribuida (fuerza lineal, superficial o de volumen) por una fuerza estáticamente equivalente en el centro de gravedad de la carga distribuida al evaluar el equilibrio estático global de la estructura utilizando las ecuaciones (1.1) a (1.5).

Diagramas de cuerpo libre (DCL)

Una parte esencial del análisis estático de un cuerpo rígido o deformable es el diagrama de cuerpo libre (DCL o FBD, por sus siglas en inglés). Si se va a obtener una solución de equilibrio correcta, todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, o componente del mismo, se deben trazar sobre el DCL. Esto incluye las fuerzas y momentos aplicados, las fuerzas y momentos de reacción, y todas las fuerzas de conexión entre los componentes individuales. Por ejemplo, el DCL *global* de la armadura plana de la figura 1.1 se aprecia en la figura 1.3a; en este DCL se muestran todas las fuerzas aplicadas y de reacción, y también aparecen las cargas concentradas estáticamente equivalentes para todas las cargas distribuidas. Las fuerzas estáticamente equivalentes F_{q0}, F_{q1} y F_{q2}, todas actuando en el c.g. de la carga distribuida correspondiente, se usan en la solución de la ecuación de equilibrio para representar a las cargas distribuidas q_0, q_1 y q_2, respectivamente.

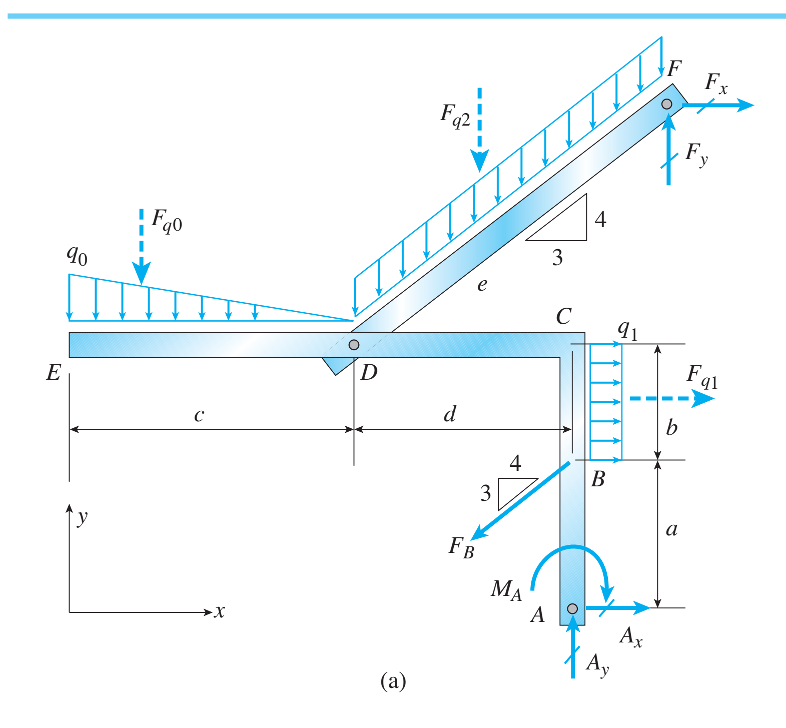
A continuación, en la figura 1.3b se ha desensamblado la armadura plana, de modo que se pueden elaborar distintos DCL para cada parte de la armadura, exponiendo así las fuerzas del pasador de unión en D (D_x, D_y). Ambos DCL deben mostrar todas las fuerzas aplicadas, así como las fuerzas de reacción A_x y A_y en el nodo del pasador de soporte A, y F_x y F_y en el nodo del pasador de soporte F. Se deben determinar fuerzas que se transmiten entre los elementos de la armadura EDC y DF en el pasador de conexión D si la interacción apropiada de ambos elementos se tomará en cuenta en el análisis estático.

En el ejemplo 1.2 se analizará la estructura de armadura plana de la figura 1.1, para encontrar las fuerzas de reacción en los nodos A y F, además de las fuerzas del pasador de conexión en el nodo D, todo esto utilizando las ecuaciones de equilibrio 1.1 a 1.3. Los DCL que se presentan en las figuras 1.3a y 1.3b son parte esencial de este proceso de solución. Se suele utilizar una *convención de signos estáticos* en la solución de las reacciones de soporte; las fuerzas que actúan en las direcciones positivas de los ejes coordinados se consideran positivas, y se utiliza la regla de la mano derecha para los vectores de momento.

Fuerzas de reacción y condiciones de soporte

Para satisfacer las ecuaciones de equilibrio, resulta esencial una apropiada fijación del cuerpo o estructura. Se debe presentar un arreglo y número suficiente de soportes para evitar que un cuerpo rígido se mueva bajo la acción de las fuerzas estáticas. Una fuerza de reacción en el soporte se representa mediante una sola flecha atravesada por una diagonal (vea la figura 1.3), mientras que una restricción de momento en el soporte se representa mediante una doble flecha curvada (bicéfala) o una flecha curvada con una diagonal. Las fuerzas y momentos de reacción a menudo son resultado de la acción de fuerzas aplicadas de los tipos antes descritos (es decir, fuerzas concentradas, distribuidas, superficiales y de volumen).

Se pueden considerar una gran variedad de condiciones de soporte diferentes, dependiendo de si el problema es bidimensional o tridimensional. Los soportes A y F de la estructura de armadura plana que se muestran en las figuras 1.1 y 1.3 son soportes de pasador, mientras que se puede conside-



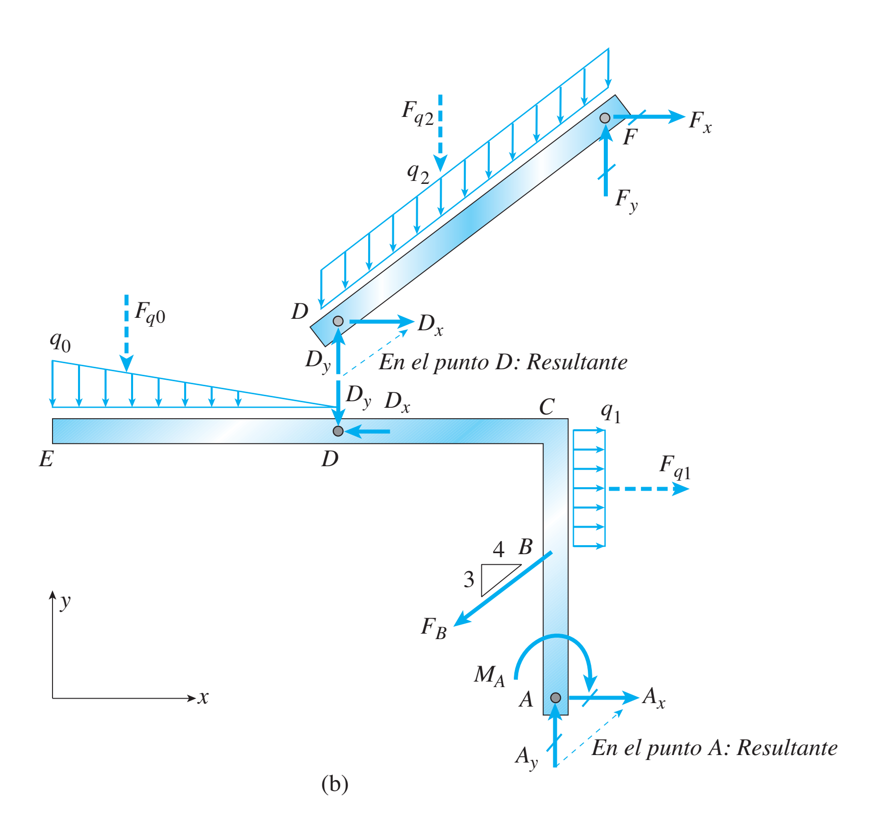


Figura 1.3

a) Diagrama de cuerpo libre global de la estructura de armadura plana de la figura 1.1, y b) diagramas de cuerpo libre por separado de las partes *A* a la *E* y *DF* de la estructura de armadura plana de la figura 1.1

rar que la base de la estructura tridimensional del anuncio de la figura 1.2 es un soporte fijo o con abrazadera. En la tabla 1.1 se muestran algunos de los supuestos más comunes de condiciones ideales para los soportes en dos y tres dimensiones. Las fuerzas o momentos de restricción o transmitidos, relaciona-

Tabla 1.1

Reacciones y fuerzas de conexión en 2D o 3D para el análisis estático

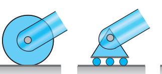
<table>
<tr><th>Tipos de soporte o conexión</th><th>Diagrama simplificado de soporte o conexión</th><th>Visualización de las fuerzas y momentos de restricción o fuerzas de conexión</th></tr>
<tr>
<td>

1) Soporte de rodillo

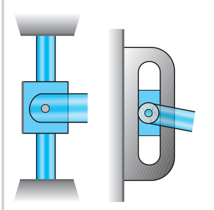


Puente con soporte de rodillo (Archivo en línea del Earthquake Engineering).

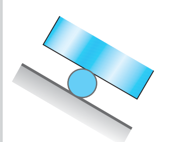
</td>
<td>



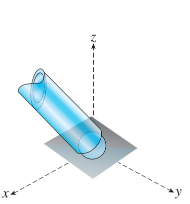
Soporte de rodillo horizontal (limita el movimiento en las direcciones *y* e –*y*)



Restricciones rodillo vertical



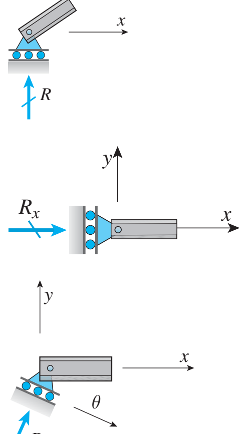
Soporte de rodillo volteado o inclinado



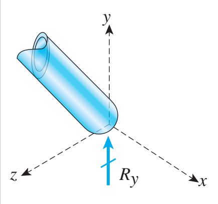
</td>
<td>



a) Soporte de rodillo bidimensional



b) Soporte de rodillo tridimensional



</td>
</tr>
<tr>
<td>

2) Soporte de pasador

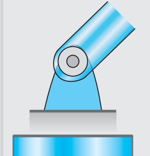


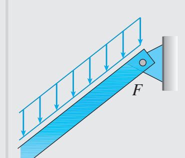
Puente son soporte de pasador (Cortesía del Ing. Joel Kerkhoff)



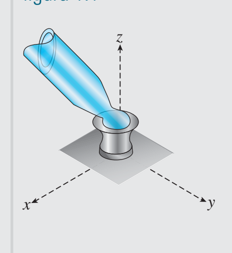
Soporte de pasador en un viejo puente de armadura (© Barry Goodno)

</td>
<td>



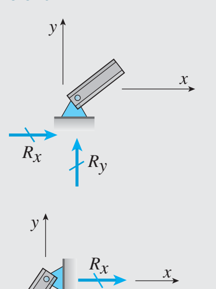


Soporte de pasador en *F* de la figura 1.1

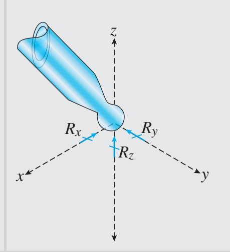


</td>
<td>

a) Soporte de pasador bidimensional



b) Soporte de pasador tridimensional



</td>
</tr>
</table>

Tabla 1.1 (continuación)

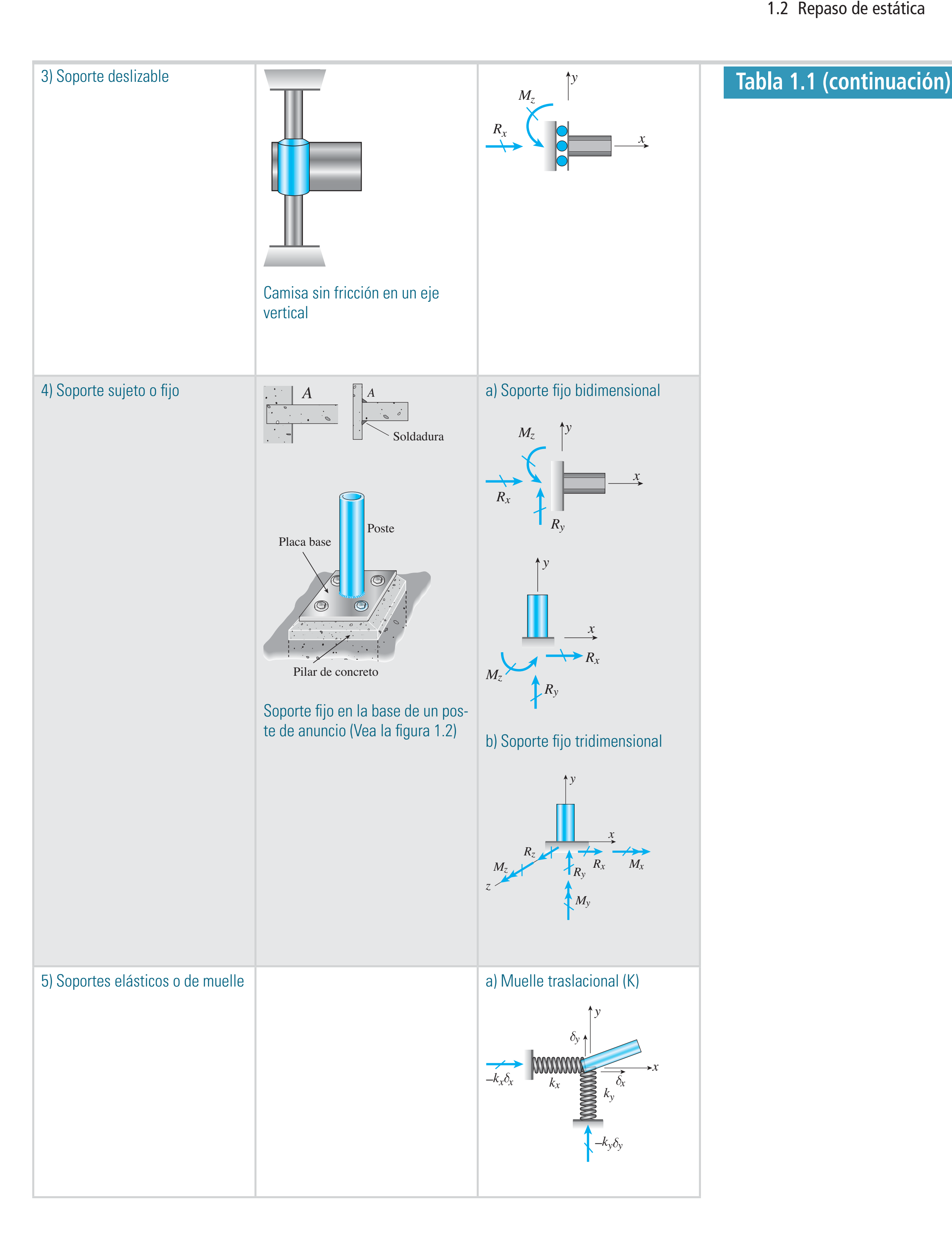


Tabla 1.1 (continuación)

		b) Muelle giratorio (k_r)
6) Conexión con pasador (de las figuras 1.1 y 1.3) Conexión con pasador en un puente antiguo (© Barry Goodno)	Conexión con pasador en *D* entre los componentes *EDC* y *DF* de la armadura plana (figura 1.1)	
7) Conexión ranurada (conexión modificada de la que se muestra en las figuras 1.1. y 1.3)	Conexión ranurada alterna en *D* sobre la armadura plana (Observe que la armadura plana de la figura 1.1 es *inestable* si en *D* se utiliza esta conexión ranurada en lugar de un pasador)	
8) Conexión rígida (las fuerzas y momentos internos de los componentes se unen en *C* de la armadura plana de la figura 1.1)	Conexión rígida en *C* sobre la armadura plana	

dos con cada tipo de soporte o conexión aparecen en la tercera columna de la tabla (sin embargo, no se trata de DCL). Las fuerzas y momentos de reacción para la estructura tridimensional del anuncio de la figura 1.2 se muestran en el DCL de la figura 1.4a: sólo las reacciones R_y, R_z y M_x son diferentes de cero,

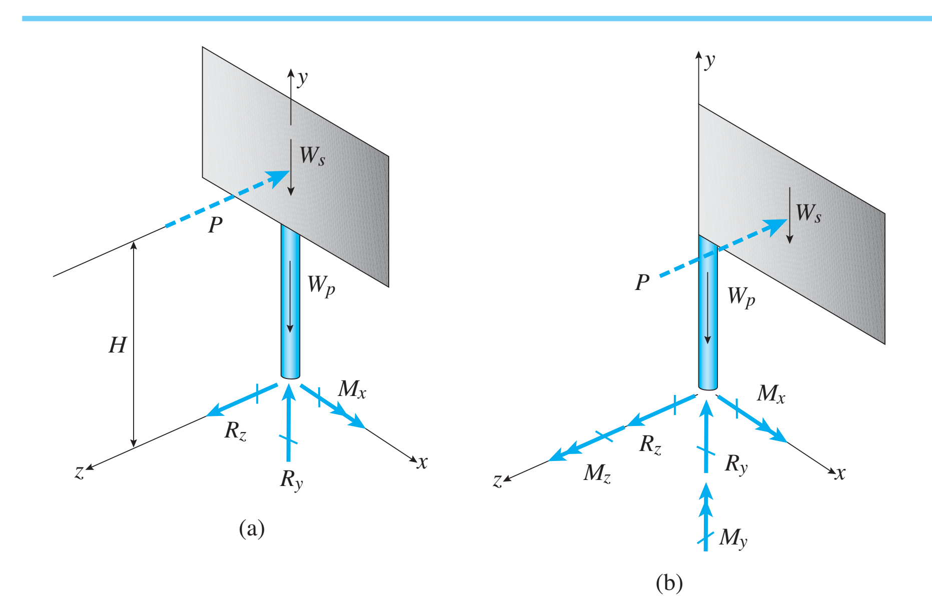


Figura 1.4

a) DCL de un anuncio con estructura simétrica, y b) DCL de un anuncio con estructura excéntrica

ya que las cargas de la estructura del anuncio y del viento son simétricas respecto al plano yz. Si el anuncio es excéntrico en relación con el poste (figura 1.4b), sólo la reacción R_x es igual a cero en caso de que la carga del viento sea en la dirección $-z$. (En el problema 1.7-16, al final del capítulo 1, encontrará un examen más detallado de las fuerzas de reacción provocadas por la presión del viento al actuar sobre la estructura del anuncio de la figura 1.2; también se calculan las fuerzas y tensiones en los pernos de la placa base. Asimismo, se analizan varias estructuras excéntricas de anuncios en los problemas al final del capítulo 8).

Fuerzas internas (resultantes de tensión)

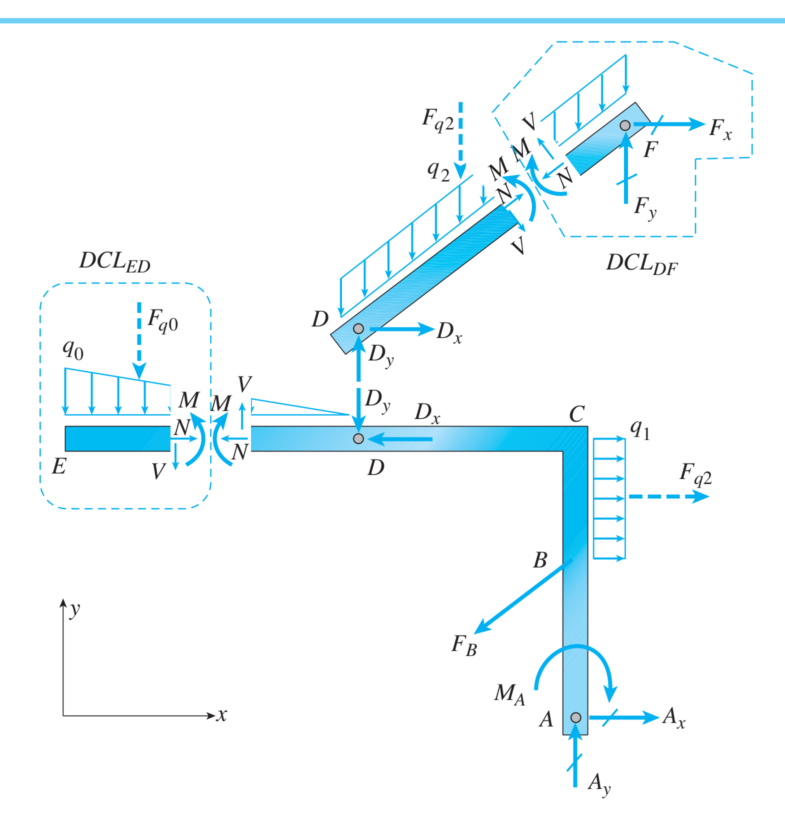
En nuestro estudio de la mecánica de materiales, investigaremos las deformaciones de los componentes o elementos que constituyen al cuerpo deformable global. Con el fin de calcular la deformación de los elementos, primero debemos encontrar las fuerzas y momentos internos (es decir, las resultantes de tensión internas) en los puntos clave a lo largo de los elementos de toda la estructura. De hecho, a menudo elaboraremos representaciones gráficas de la fuerza axial interna, del momento de torsión, de la cortante transversal y del momento de flexión a lo largo del eje de cada elemento del cuerpo, para identificar con facilidad los puntos o zonas críticos dentro de la estructura. El primer paso es hacer un corte de sección paralelo al eje de cada elemento, para poder elaborar un DCL que muestre las fuerzas internas pertinentes. Por ejemplo, si se hace un corte en la parte superior del elemento BC de la armadura plana de la figura 1.1, la *fuerza axial* (N_c), la *fuerza cortante transversal* (V_c) y el *momento de flexión* (M_c) internos en el nodo C se pueden exponer como se muestra en la última fila de la tabla 1.1. En la figura 1.5 se muestran dos cortes adicionales, realizados en los elementos ED y DF de la armadura

plana; ahora se puede utilizar el DCL resultante para encontrar *N*, *V* y *M* en los elementos *ED* y *DF* de la armadura plana. Las resultantes de tensión *N*, *V* y *M* se suelen tomar a lo largo y paralelas al elemento en consideración (es decir, se usan los ejes local o del elemento), y se emplea una *convención de signos de deformación* (es decir, la tensión es positiva y la compresión es negativa) en su resolución. En capítulos posteriores se verá cómo se usan estas (y otras) resultantes de tensión interna para calcular tensiones en la sección transversal del elemento.

Los siguientes ejemplos se presentan como un repaso de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático en la solución de reacciones externas y fuerzas internas en las estructuras de celosía, vigas, eje circular y armadura. Primero se considera una **estructura de celosía** y se repasan las soluciones escalar y vectorial de las fuerzas de reacción. Luego se calculan las fuerzas del elemento, utilizando el *método de nodos*. Se ha visto que resulta esencial un DCL trazado de forma adecuada para la resolución global del proceso. El segundo ejemplo incluye el análisis estático de una **estructura de viga** para encontrar las reacciones y fuerzas internas en una sección específica a lo largo de ésta. En el tercer ejemplo se calculan los momentos de torsión reactivo e interno de un **eje escalonado**. Y por último, el cuarto ejemplo presenta la solución de la **estructura de armadura plana** que se estudia aquí. Se asignan valores numéricos a las fuerzas aplicadas y las dimensiones estructurales, y luego se calculan las fuerzas de reacción en la unión de pasador, así como una selección de fuerzas internas en la estructura.

Figura 1.5

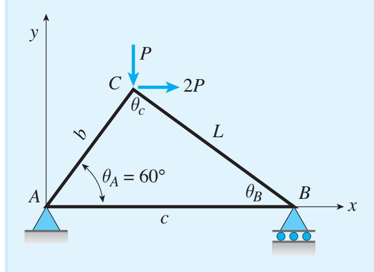
Diagrama de cuerpo libre para las resultantes de tensión interna en *ED* y *DF*



Ejemplo 1.1

Figura 1.6

Ejemplo 1.1: Análisis estático de las cargas de nodo en una armadura plana



La armadura plana que se muestra en la figura 1.6 tiene un soporte de pasador en A y uno de rodillo en B. Se le aplican las cargas conjuntas $2P$ y $-P$ en el nodo C. Encuentre las reacciones de soporte en los nodos A y B, y luego calcule las fuerzas en los elementos AB, AC y BC. Utilice las propiedades numéricas que se le proporcionan.

Datos numéricos:

$$P = 35\text{ kip} \quad L = 10\text{ ft} \quad \theta_A = 60^\circ \quad b = 0.71\,L = 7.1\text{ ft}$$

Solución:

1) Use la ley de los senos para encontrar los ángulos θ_B y θ_C, luego encuentre la longitud (c) del elemento AB.
2) Trace el DCL, después use las ecuaciones de equilibrio de forma escalar (ecuación 1.3) para calcular las reacciones en el soporte.
3) Encuentre las fuerzas del elemento empleando el método de nodos.
4) Repita la solución de las reacciones en el soporte, utilizando una resolución vectorial.
5) Calcule las reacciones de soporte y las fuerzas del elemento para una versión tridimensional de esta armadura plana (o bidimensional).

1) Use la ley de los senos para encontrar los ángulos θ_B y θ_C, y luego determine la longitud (c) del elemento AB.

Vea la **ley de los senos** en el apéndice D:

$$\theta_B = \text{asen}\left(\frac{b}{L}\,\text{sen}(\theta_A)\right) = 37.943^\circ \text{ entonces } \theta_C = 180^\circ - (\theta_A + \theta_B) = 82.057^\circ$$

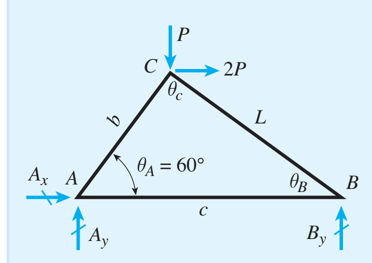
$$\text{y} \quad c = L\left(\frac{\text{sen}(\theta_C)}{\text{sen}(\theta_A)}\right) = 11.436\text{ ft} \quad \text{o} \quad c = b\cos(\theta_A) + L\cos(\theta_B) = 11.436\text{ ft}$$

Observe que también se podría utilizar la ley de los cosenos:

$$c = \sqrt{b^2 + L^2 - 2bL\cos(\theta_C)} = 11.436\text{ ft}$$

Figura 1.7

Ejemplo 1.1: Diagrama de cuerpo libre de una armadura plana



2) Trace el DCL, después use las ecuaciones de equilibrio en forma escalar (ecuación 1.3) para calcular las reacciones en el soporte.

Observe que **la armadura plana es estáticamente determinada**, puesto que hay ($m + r = 6$) incógnitas (donde m = número de fuerzas en el elemento y r = número de reacciones), pero hay ($2j = 2 \times 3 = 6$) ecuaciones de estática del método de nodos (donde j = número de nodos).

Utilice las ecuaciones de equilibrio en forma escalar para encontrar las reacciones de soporte.

Sume los momentos que actúan sobre A para obtener la reacción en B_y:

$$B_y = \frac{[Pb\cos(\theta_A) + (2P)b\,\text{sen}(\theta_A)]}{c} = 48.5\text{ kip}$$

Sume las fuerzas con dirección y para obtener A_y:

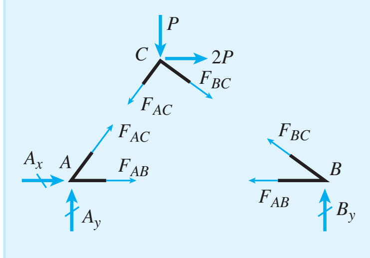
$$A_y = P - B_y = -13.5\text{ kip}$$

Sume las fuerzas con dirección x para obtener A_x:

$$A_x = -2P = -70\text{ kip}$$

Figura 1.8

Ejemplo 1.1. Diagrama de cuerpo libre de cada nodo de una armadura plana



3) Encuentre las fuerzas del elemento empleando el método de nodos.

Trace los DCL de cada nodo (figura 1.8) y luego sume las fuerzas con direcciones x y y para encontrar las fuerzas del elemento.

Continúa

Ejemplo 1.1 - *Continuación*

La suma de las fuerzas con dirección y en el nodo A es:

$$F_{AC} = \frac{-A_y}{\text{sen}\ (\theta_A)} = 15.59 \text{ kip}$$

La suma de las fuerzas con dirección x del nodo A es:

$$F_{AB} = -A_x - F_{AC}\cos\ (\theta_A) = 62.2 \text{ kip}$$

La suma de las fuerzas con dirección y en el nodo B es:

$$F_{BC} = \frac{-B_y}{\text{sen}\ (\theta_B)} \qquad F_{BC} = -78.9 \text{ kip}$$

Revise el equilibrio en el nodo C. (Primero en la dirección x y luego en la dirección y).

$$-F_{AC}\cos\ (\theta_A) + F_{BC}\cos\ (\theta_B) + 2P = 0 \qquad -F_{AC}\,\text{sen}\ (\theta_A) - F_{BC}\,\text{sen}\ (\theta_B) - P = 0$$

4) Repita la solución de las reacciones en el soporte utilizando una resolución vectorial (las componentes *x*, *y*, *z* en formato vectorial).

Los vectores de posición para B y C a partir de A:

$$r_{AB} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.436 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ft} \qquad r_{AC} = \begin{pmatrix} b\cos\ (\theta_A) \\ b\,\text{sen}\ (\theta_A) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.55 \\ 6.149 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ft}$$

Los vectores de fuerza en A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2P \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sume los momentos cercanos al punto A, luego iguale cada expresión a cero:

$$M_A = r_{AB} \times B + r_{AC} \times C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.436 \text{ ft } B_y - 554.66 \text{ ft}\cdot\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\text{entonces } B_y = \frac{554.66}{11.436} = 48.5 \text{ kip}$$

$$\text{o}\ldots \left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ c & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{b}{2} & b\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 2P & -P & 0 \end{pmatrix} \right| = 11.436 \text{ ft } B_y \cdot k - 554.66 \text{ ft}\cdot k\cdot\text{kip}$$

Ahora sume las fuerzas e iguale a cero cada expresión:

$$A + B + C \rightarrow \begin{pmatrix} A_x + 70 \text{ kip} \\ A_y + B_y - 35 \text{ kip} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces } A_x = -70 \text{ kip}$$

$$A_y = 35 - B_y = -13.5 \text{ kip}$$

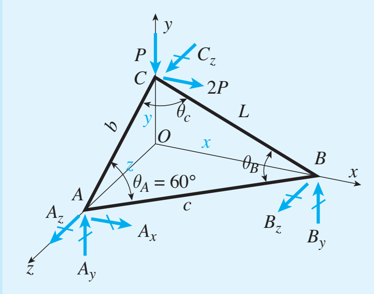
Las reacciones A_x, A_y y B_y son las mismas que las del método de solución escalar.

5) Calcule las reacciones de soporte y las fuerzas del elemento para una versión tridimensional de esta armadura plana (o bidimensional).

Para crear una armadura especial a partir de una armadura plana, se mueve el nodo A a lo largo del eje z una distancia z, mientras se mantiene B sobre el eje x

Figura 1.9

Ejemplo 1.1: Diagrama de cuerpo libre de una armadura espacial (versión extendida de una armadura plana)



y se limita a C para que quede situado a cierta distancia a lo largo del eje y (vea la figura 1.9); conserve las longitudes de los elementos (L, b, c) y los ángulos (θ_A, θ_B, θ_C) para los valores que se utilizan con la armadura plana. Aplique las cargas de nodo $2P$ y $-P$ en el nodo C. Agregue un soporte tridimensional de pasador en A, dos sujeciones en B (B_y, B_z) y una sujeción en C (C_z).

Observe que **la armadura espacial es estáticamente determinada**, puesto que hay ($m + r = 9$) incógnitas (donde m = número de fuerzas sobre el elemento y r = número de reacciones), y a la vez existen ($3j = 3 \times 3 = 9$) ecuaciones de estática a partir del método de nodos (donde j = número de nodos).

Para empezar, encuentre las proyecciones x, y y z de los elementos a lo largo de los ejes coordenados. Luego encuentre los ángulos OBC, OBA y OAC en cada plano.

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2 + c^2}{2}} = 9.49677 \text{ ft} \qquad y = \sqrt{\frac{L^2 + b^2 - c^2}{2}} = 3.13232 \text{ ft}$$

$$z = \sqrt{\frac{-L^2 + b^2 + c^2}{2}} = 6.3717 \text{ ft}$$

$$OBC = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = 18.254° \qquad OBA = \text{atan}\left(\frac{z}{x}\right) = 33.859°$$

$$OAC = \text{atan}\left(\frac{y}{z}\right) = 26.179°$$

Trace el DCL global (vea la figura 1.9) y luego use una *solución escalar* para encontrar las fuerzas de reacción y sobre el elemento.

1) Sume los momentos cercanos a la recta que va hasta A, que es paralela al eje y (esto aislará a la reacción B_z, lo que genera una ecuación con una incógnita):

$$B_z x + (2P)z = 0 \qquad B_z = -2P\frac{z}{x} = -47 \text{ kip}$$

Esto se basa en la *convención estática de signos*, por lo que el signo negativo significa que la fuerza B_z actúa en la dirección $-z$.

2) Para encontrar B_y, sume los momentos cercanos al eje z y luego sume las fuerzas con dirección y para obtener A_y:

$$B_y = \frac{2P(y)}{x} = 23.1 \text{ kip} \quad \text{así} \quad A_y = P - B_y = 11.91 \text{ kip}$$

3) Para determinar C_z, sume los momentos cercanos al eje x:

$$C_z = \frac{A_y z}{y} = 24.2 \text{ kip}$$

4) Para determinar A_x y A_z, sume las fuerzas con direcciones x y z:

$$A_x = -2P = -70 \text{ kip} \qquad A_z = -C_z - B_z = 22.7 \text{ kip}$$

5) Por último, utilice el método de nodos para calcular las fuerzas del elemento (aquí se emplea una convención de signos para la deformación, de modo que si es positiva (+) se refiere a tensión, y si es negativa (–) se refiere a compresión).

Sume las fuerzas con dirección x en el nodo A:

$$\frac{x}{c}F_{AB} + A_x = 0 \qquad F_{AB} = \frac{-c}{x}A_x \qquad F_{AB} = 84.3 \text{ kip}$$

Sume las fuerzas con dirección y en el nodo A:

$$\frac{y}{b}F_{AC} + A_y = 0 \qquad F_{AC} = \frac{b}{y}(-A_y) \qquad F_{AC} = -27 \text{ kip}$$

Continúa

3 CAPÍTULO

Torsión



Los ejes circulares son componentes esenciales de máquinas y dispositivos para generación y transmisión de energía. (R. Scott Lewis en ACCO Engineered Systems)

PERSPECTIVA GENERAL DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata del torcimiento de barras circulares y ejes huecos sometidos a momentos torsionales. Primero consideramos la **torsión uniforme**, que se refiere al caso en el cual el par de torsión es constante en toda la longitud de un eje prismático, en tanto que la **torsión no uniforme** describe casos en los que el momento torsional y/o la rigidez torsional de la sección transversal varía en toda la longitud. Como en el caso de las deformaciones axiales, debemos relacionar el esfuerzo y la deformación, y también la carga aplicada y la deformación. Para torsión, recuerde que la **ley de Hooke para cortante** establece que los esfuerzos cortantes, τ, son proporcionales a las deformaciones unitarias por cortante, γ, con G como la constante de proporcionalidad, que es el módulo de elasticidad en cortante. Los esfuerzos cortantes y deformaciones unitarias por cortante varían linealmente con creciente distancia radial en la sección transversal, como se describe con la **fórmula de la torsión**. El ángulo de torsión, ϕ, es proporcional al momento torsional interno y a la flexibilidad torsional de la barra circular. La mayor parte del análisis de este capítulo se dedica al comportamiento lineal elástico y a rotaciones pequeñas de elementos estáticamente determinados. Sin embargo, si la barra es **estáticamente indeterminada**, debemos aumentar las ecuaciones del equilibrio estático con ecuaciones de compatibilidad (que se basan en **relaciones par de torsión-desplazamiento**) para resolver cualesquiera incógnitas de interés, como momentos de soporte o momentos torsionales internos en elementos. Los **esfuerzos sobre secciones inclinadas** también se estudian en capítulos posteriores como primer paso hacia una consideración más completa de estados de esfuerzo plano. Por último, al final del capítulo se introduce una variedad de temas especializados y avanzados (como energía de deformación, torsión de ejes no circulares, flujo cortante en tubos de pared delgada y concentraciones de esfuerzos en torsión).

El capítulo 9 está organizado de la siguiente manera:

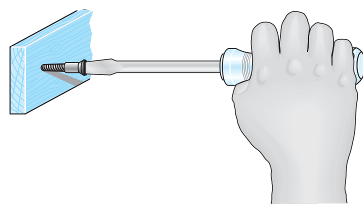
* Temas especializados y/o avanzados

3.1 INTRODUCCIÓN

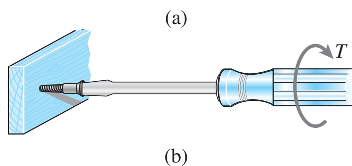
En los capítulos 1 y 2 se analiza el comportamiento del tipo de elemento estructural más simple, que es una barra recta sometida a cargas axiales. Ahora consideramos un tipo de comportamiento ligeramente más complejo conocido como **torsión**, la cual se refiere al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o pares de torsión) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra. Por ejemplo, cuando usted gira un destornillador (figura 3.1a), su mano aplica un par de torsión T al mango (figura 3.1b) y tuerce el vástago del destornillador. Otros ejemplos de barras en torsión son los ejes de impulsión en automóviles, ejes de transmisión, ejes de hélices, barras de dirección y brocas de taladros.

Figura 3.1

Torsión de un destornillador debida al par de torsión T aplicado al mango



(a)



(b)

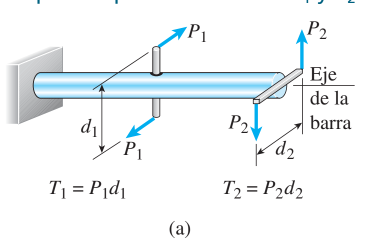
Un caso ideal de carga torsional se representa en la figura 3.2a, donde se muestra una barra recta soportada en un extremo y cargada por dos pares de fuerzas iguales y opuestas. El primer par consiste en las fuerzas P_1, que actúan cerca del punto medio de la barra, y el segundo par consiste en las fuerzas P_2, que actúan en el extremo. Cada par de fuerzas forma un **par de torsión** que tiende a torcer la barra con respecto a su eje longitudinal. Como sabemos por la estática, el **momento de un par de torsión** es igual al producto de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas; por tanto, el primer par de torsión tiene un momento $T_1 = P_1 d_1$ y el segundo un momento $T_2 = P_2 d_2$.

Las **unidades** en el sistema inglés para el momento son la libra-pie (lb-ft) y la libra-pulgada (lb-in.). La unidad en el SI para el momento es el newton metro (N · m).

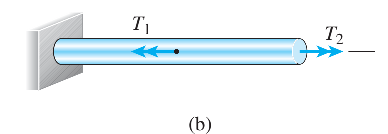
El momento de un par de torsión se puede representar por un **vector** en la forma de una flecha con cabeza doblada (figura 3.2b). La flecha es perpendicular al plano que contiene el par de torsión y, por lo tanto, en este caso las dos flechas son paralelas al eje de la barra. La dirección (o *sentido*) del momento se indica mediante la *regla de la mano derecha* para vectores momento: empleando su mano derecha, permita que los dedos se curven en el sentido del momento, y entonces su dedo pulgar apuntará en la dirección del vector.

Figura 3.2

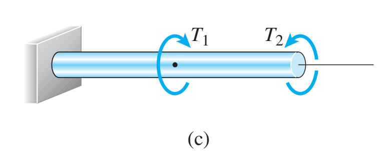
Barra circular sometida a torsión por los pares de torsión T_1 y T_2



(a)



(b)



(c)

Una representación alterna de un momento es una flecha curva que actúa en el sentido de la rotación (figura 3.2c). La flecha curva y las representaciones vectoriales son de uso común, y en este libro emplearemos las dos. La elección depende de la conveniencia y preferencia personales.

Los momentos que producen el torcimiento de una barra, como los marcados T_1 y T_2 en la figura 3.2, se llaman **pares de torsión** o **momentos de torsión**. Los elementos cilíndricos que se someten a pares de torsión y transmiten potencia mediante rotación se llaman **ejes**, por ejemplo, el eje impulsor de un automóvil o el eje de la hélice de un barco. La mayoría de los ejes tiene secciones transversales circulares, ya sean sólidas o tubulares.

En este capítulo inicia el desarrollo de fórmulas para las deformaciones unitarias y esfuerzos en barras circulares sometidas a torsión. Luego, se analiza el estado de esfuerzo conocido como *cortante pura* y se obtiene la relación entre los módulos de elasticidad E y G en tensión y cortante, respectivamente. En seguida, estudiamos los ejes rotatorios y se determina la potencia que transmiten. Por último, estudiamos varios temas adicionales relacionados con la torsión, los cuales son elementos estáticamente indeterminados, energía de deformación, tubos de pared delgada de sección transversal no circular y concentraciones de esfuerzos.

3.2 DEFORMACIONES TORSIONALES DE UNA BARRA CIRCULAR

El estudio de la torsión comienza al considerar una barra prismática con sección transversal circular torcida por pares de torsión T que actúan en sus extremos (figura 3.3a). Dado que cada sección transversal de la barra es idéntica, y puesto que cada sección transversal se somete al mismo par de torsión interno T, se dice que la barra está en **torsión pura**. A partir de consideraciones de simetría, se puede demostrar que las secciones transversales de la barra no cambian de forma conforme giran con respecto al eje longitudinal. En otras palabras, todas las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios permanecen rectos. Además, si el ángulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambiarán la longitud de la barra ni sus radios.

Para ayudar a visualizar la deformación de la barra, imagine que el extremo izquierdo de la misma (figura 3.3a) está fijo. Luego, ante la acción del par de torsión T, el extremo derecho girará (con respecto al extremo izquierdo) en un ángulo pequeño f, conocido como ángulo de torsión (o ángulo de *rotación*). Debido a esta rotación, una recta longitudinal pq en la superficie de la barra se convertirá en la curva helicoidal pq', donde q' es la posición del punto q después de que la sección transversal extrema ha girado en el ángulo f (figura 3.3b).

El ángulo de torsión cambia a lo largo del eje de la barra, y en secciones transversales intermedias tendrá un valor de $\phi(x)$ que está entre cero en el extremo izquierdo y ϕ en el extremo derecho. Si cada sección transversal de la barra tiene el mismo radio y se somete al mismo par de torsión (torsión pura), el ángulo $\phi(x)$ variará linealmente entre los extremos.

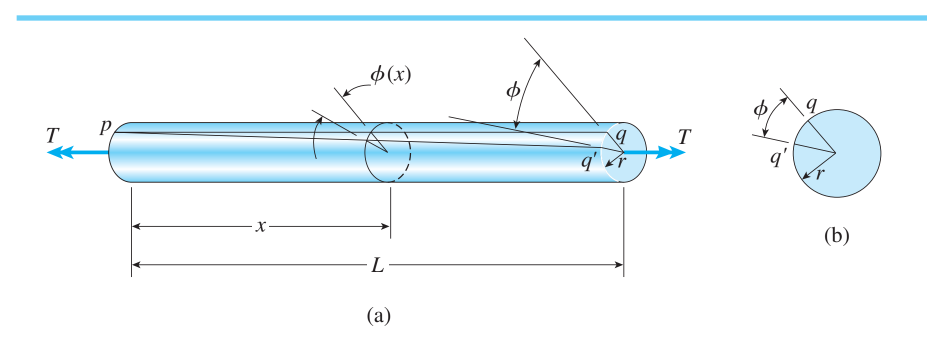


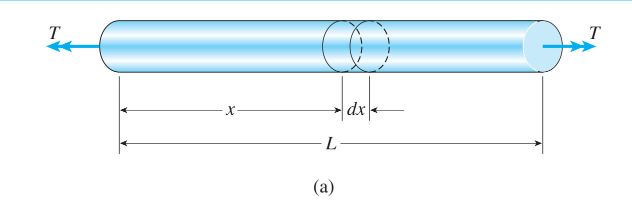
Figura 3.3
Deformaciones de una barra circular en torsión pura

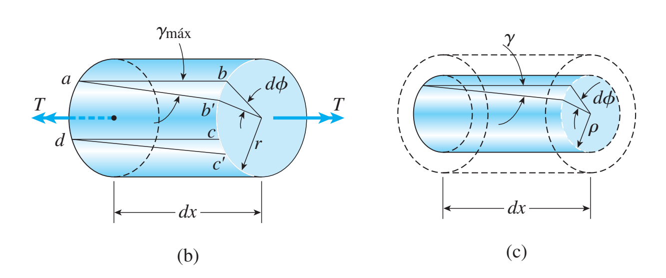
Deformaciones unitarias por cortante en la superficie exterior

Ahora considere un elemento de la barra entre dos secciones transversales separadas una distancia dx (vea la figura 3.4a en la siguiente página). Este elemento se muestra agrandado en la figura 3.4b. En su superficie exterior identificamos un elemento pequeño $abcd$, con lados ab y cd que al inicio son paralelos al eje longitudinal. Durante el torcimiento de la barra, la sección transversal derecha gira con respecto a la sección transversal izquierda un ángulo pequeño de torsión $d\phi$, de manera que los puntos b y c se mueven a b' y c', respectivamente. Las longitudes de los lados del elemento, que ahora es el elemento $ab'c'd$, no cambian durante esta rotación pequeña.

Figura 3.4

Deformación de un elemento de longitud *dx* cortado de una barra en torsión





Sin embargo, los ángulos en las esquinas del elemento (figura 3.4b) ya no son iguales a 90°. Por lo tanto, el elemento está en un estado de **cortante puro**, lo cual significa que está sometido a deformaciones por cortante pero no a deformaciones normales (vea la figura 1.28 de la sección 1.4). La magnitud de la deformación por cortante en la superficie exterior de la barra, que se denota $\gamma_{\text{máx}}$, es igual al decremento en el ángulo en el punto *a,* es decir, el decremento en el ángulo *bad*. En la figura 3.4b se observa que el decremento en este ángulo es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{bb'}{ab} \tag{3.1}$$

donde $\gamma_{\text{máx}}$ se mide en radianes, bb' es la distancia que se desplaza el punto b y ab es la longitud del elemento (igual a dx). Si r denota el radio de la barra, podemos expresar la distancia bb' como $rd\phi$, donde $d\phi$ también se mide en radianes. Así, la ecuación anterior se convierte en

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} \tag{3.2}$$

Esta ecuación relaciona la deformación unitaria por cortante en la superficie exterior de la barra con el ángulo de torsión.

La cantidad $d\phi/dx$ es la razón de cambio del ángulo de torsión ϕ con respecto a la distancia x medida a lo largo del eje de la barra. Denotaremos $d\phi/dx$ con el símbolo θ y se hará referencia a ella como **razón de torsión** o **ángulo de torsión por unidad de longitud**.

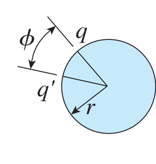
$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \tag{3.3}$$

Con esta notación ahora podemos escribir la ecuación para la deformación unitaria por cortante en la superficie exterior [ecuación (3.2)] como sigue:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta \tag{3.4}$$

Por conveniencia hemos considerado una barra sujeta a torsión pura al deducir las ecuaciones (3.3) y (3.4). Sin embargo, las dos ecuaciones son válidas en

Figura 3.3b (Repetida)



(b)

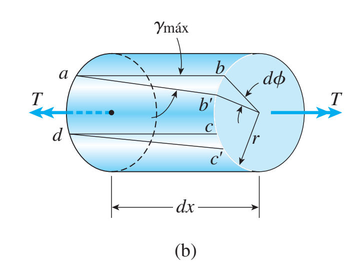
casos más generales de torsión, como cuando la razón de torsión θ no es constante, sino que varía con la distancia x a lo largo del eje de la barra.

En el caso especial de torsión pura, la razón de torsión es igual al ángulo de torsión total ϕ dividido entre la longitud L, es decir, $\theta = \phi/L$. Por lo tanto, *sólo para torsión pura*, se obtiene

$$\gamma_{\text{máx}} = r\theta = \frac{r\phi}{L} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Esta ecuación se puede obtener directamente de la geometría de la figura 3.3a al observar que $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo entre las líneas pq y pq', es decir, $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo qpq'. Por lo tanto, $\gamma_{\text{máx}}L$ es igual a la distancia qq' en el extremo de la barra. Pero como la distancia qq' también es igual a $r\phi$ (figura 3.3b), obtenemos $r\phi = \gamma_{\text{máx}}L$, que concuerda con la ecuación (3.5).

Figura 3.4b (Repetida)



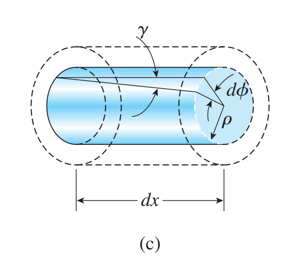
(b)

Deformaciones unitarias por cortante dentro de la barra

Las deformaciones unitarias por cortante en el interior de la barra se pueden determinar mediante el mismo método empleado para encontrar la deformación unitaria por cortante $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie. Como los radios en las secciones transversales de una barra permanecen rectos y sin distorsión durante la torsión, se observa que el análisis anterior para un elemento *abcd* en la superficie exterior (figura 3.4b) también será válido para un elemento similar situado en la superficie de un cilindro interior con radio ρ (figura 3.4c). Por consiguiente, los elementos interiores también están en cortante puro con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dadas por la ecuación [compare con la ecuación (3.4)]:

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\text{máx}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Figura 3.4c (Repetida)



(c)

Esta ecuación muestra que las deformaciones unitarias cortantes en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro, siendo cero la deformación unitaria en el centro y alcanzando un valor máximo de $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie exterior.

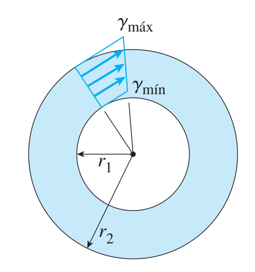
Tubos circulares

Un repaso de los análisis anteriores demostrará que las ecuaciones para las deformaciones unitarias cortantes [ecuaciones (3-2) a (3-4)] se aplican tanto a **tubos circulares** (figura 3.5) como a barras circulares sólidas. En la figura 3.5 se muestra la variación lineal en deformación unitaria por cortante entre la deformación unitaria máxima en la superficie exterior y la deformación unitaria mínima en la superficie interior. Las ecuaciones para estas deformaciones unitarias son las siguientes:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_2\phi}{L} \qquad \gamma_{\text{mín}} = \frac{r_1}{r_2}\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_1\phi}{L} \qquad \textbf{(3.7a, b)}$$

Figura 3.5

Deformaciones unitarias por cortante en un tubo circular



donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior, respectivamente, del tubo.

Todas las ecuaciones anteriores para las deformaciones unitarias en una barra circular se basan en conceptos geométricos y no incluyen las propiedades del material. Por lo tanto, las ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte elástica o inelásticamente, lineal o no linealmente. Sin embargo, las ecuaciones están limitadas a barras con ángulos de torsión pequeños y deformaciones unitarias mínimas.

3.3 BARRAS CIRCULARES DE MATERIALES LINEALMENTE ELÁSTICOS

Ahora que hemos investigado las deformaciones unitarias por cortante en una barra circular en torsión (vea las figuras 3.3 a 3.5) podemos determinar las direcciones y magnitudes de los esfuerzos cortantes correspondientes. Las direcciones de los esfuerzos se pueden determinar por inspección, como se ilustra en la figura 3.6a, donde se observa que el par de torsión T tiende a girar el extremo derecho de la barra en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde la derecha. Por lo tanto, los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre un elemento de esfuerzo ubicado en la superficie de la barra tendrán las direcciones que se muestran en la figura.

Por claridad, el elemento de esfuerzo que se muestra en la figura 3.6a está agrandado en la figura 3.6b, donde se muestran tanto la deformación unitaria por cortante como los esfuerzos cortantes. Como se explicó antes en la sección 2.6, acostumbramos dibujar elementos de esfuerzo en dos dimensiones, como en la figura 3.6b, pero siempre debemos recordar que los elementos de esfuerzo en realidad son objetos tridimensionales con un espesor perpendicular al plano de la figura.

Las magnitudes de los esfuerzos cortantes se pueden determinar a partir de las deformaciones unitarias mediante la relación esfuerzo-deformación unitaria para el material de la barra. Si el material es linealmente elástico, podemos utilizar la **ley de Hooke en cortante** [ecuación (1.21)]:

$$\tau = G\gamma \qquad \textbf{(3.8)}$$

donde G es el módulo de elasticidad en cortante y γ es la deformación unitaria por cortante en radianes. Al combinar esta ecuación con las ecuaciones para las deformaciones unitarias por cortante [ecuaciones (3.2) y (3.4)], se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = Gr\theta \qquad \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{\text{máx}} \qquad \textbf{(3.9a,b)}$$

donde $\tau_{\text{máx}}$ es el esfuerzo cortante en la superficie exterior de la barra (radio r), τ es el esfuerzo cortante en un punto interior (radio ρ) y θ es la razón de torsión. (En estas ecuaciones, θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud.)

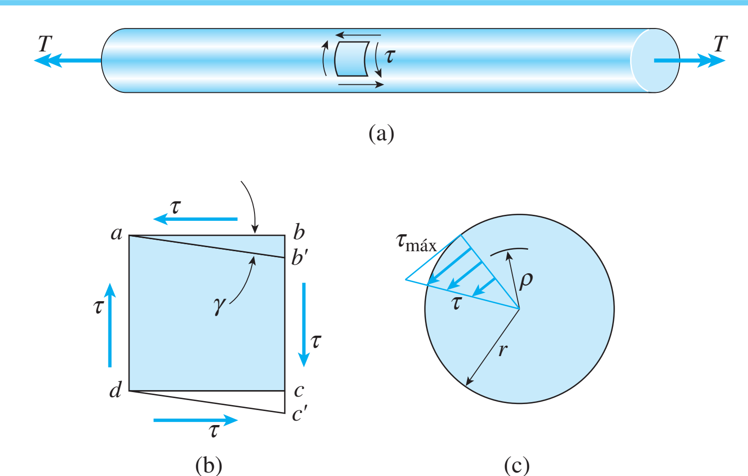


Figura 3.6

Esfuerzos cortantes en una barra circular en torsión

Las ecuaciones (3.9a) y (3.9b) muestran que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia desde el centro de la barra, como se ilustra por el diagrama triangular de esfuerzo en la figura 3.6c. Esta variación lineal del esfuerzo es una consecuencia de la ley de Hooke. Si la relación esfuerzo-deformación unitaria no es lineal, los esfuerzos no variarán linealmente y se necesitarán otros métodos de análisis.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un plano transversal van acompañados de esfuerzos cortantes de la misma magnitud que las que actúan sobre planos longitudinales (figura 3.7). Esta conclusión se deriva del hecho de que en planos mutuamente perpendiculares siempre existen esfuerzos cortantes iguales, como se explicó en la sección 1.7. Si el material de la barra es más débil en cortante en planos longitudinales que en planos transversales, como es común en la madera cuando el grano corre paralelo al eje de la barra, las primeras grietas debidas a la torsión aparecerán en la superficie en la dirección longitudinal.

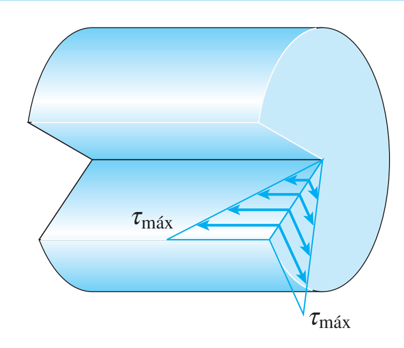


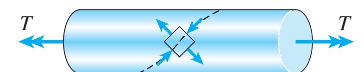
Figura 3.7

Esfuerzos cortantes longitudinal y transversal en una barra circular sometida a torsión

El estado de cortante puro en la superficie de la barra (figura 3.6b) equivale a esfuerzos iguales de tensión y compresión que actúan en un elemento orientado a un ángulo de 45°, como se explica más adelante en la sección 3.5. Por lo tanto, un elemento rectangular con lados a 45° con respecto al eje de la barra estará sometido a esfuerzos de tensión y compresión, como se muestra en la figura 3.8. Si una barra en torsión está hecha de un material que es más débil en tensión que en cortante, la falla ocurrirá en tensión a lo largo de una hélice inclinada a 45° con respecto al eje, como usted lo puede demostrar torciendo una pieza de tiza para pizarrón.

Figura 3.8

Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a 45° con respecto al eje longitudinal



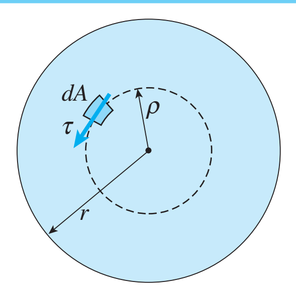
La fórmula de la torsión

El paso siguiente en el análisis es determinar la relación entre los esfuerzos cortantes y el par de torsión T. Una vez determinada esta relación, podremos calcular los esfuerzos y deformaciones unitarias en una barra debidas a cualquier conjunto de pares de torsión aplicados.

La distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal se representa en las figuras 3.6c y 3.7. Debido a que dichos esfuerzos actúan continuamente alrededor de la sección transversal, tienen una resultante en la forma de un momento, que es igual al par de torsión T que actúa sobre la barra. Para determinar esta resultante consideramos un elemento de área dA ubicado a una distancia radial ρ desde el eje de la barra (figura 3.9). La fuerza cortante que actúa sobre este elemento es igual a τdA, donde τ es el esfuerzo cortante a un radio ρ. El momento de esta fuerza con respecto al eje de la barra

Figura 3.9

Determinación de la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal



es igual a la fuerza multiplicada por su distancia desde el centro, o $\tau\rho dA$. Sustituyendo el valor del esfuerzo cortante τ dado por la ecuación (3.9b), podemos expresar este momento elemental como

$$dM = \tau\rho dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r}\rho^2 dA$$

El momento resultante (igual al par de torsión T) es la suma a lo largo de toda el área de la sección transversal de todos los momentos elementales:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r}\int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} I_P \qquad \textbf{(3.10)}$$

donde

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \qquad \textbf{(3.11)}$$

es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular.

Para un **círculo** con radio r y diámetro d, el momento polar de inercia es

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \qquad \textbf{(3.12)}$$

como se indica en el apéndice E, caso 9. Observe que los momentos de inercia tienen unidades de longitud a la cuarta potencia.*

Es posible obtener una expresión para el esfuerzo cortante máximo reacomodando la ecuación (3.10), como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Esta ecuación, conocida como la **fórmula de la torsión**, muestra que el esfuerzo cortante máximo es proporcional al par de torsión aplicado T e inversamente proporcional al momento polar de inercia polar I_P.

Las **unidades** comunes empleadas en la fórmula de la torsión son las siguientes. En el sistema SI el par de torsión T suele expresarse en newton metro (N·m), el radio r en metros (m), el momento polar de inercia I_P en metros a la cuarta potencia (m^4) y el esfuerzo cortante τ en pascales (Pa). Si se utilizan unidades inglesas, con frecuencia T se expresa en libra-pies (lb-ft) o libra-pulgadas

* Los momentos polares de inercia se estudian en la sección 12.6 del capítulo 12.

(lb-in.) r en pulgadas (in.), I_P en pulgadas a la cuarta potencia (in.^{4}) y τ en libras por pulgada cuadrada (psi).

Si se sustituye $r = d/2$ e $I_P = \pi d^4/32$ en la fórmula de la torsión, se obtiene la ecuación siguiente para el esfuerzo máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{3.14}$$

Esta ecuación sólo aplica a barras con *sección transversal circular sólida*, en tanto que la fórmula de la torsión [ecuación (3.13)] aplica tanto a barras sólidas como a tubos circulares, como se explica más adelante. La ecuación (3.14) muestra que el esfuerzo cortante es inversamente proporcional al cubo del diámetro. Por consiguiente, si se duplica el diámetro, el esfuerzo se reduce por un factor de ocho.

El esfuerzo cortante a una distancia ρ desde el centro de la barra es

$$\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{\text{máx}} = \frac{T\rho}{I_P} \tag{3.15}$$

que se obtiene al combinar la ecuación (3.9b) con la fórmula de la torsión [ecuación (3.13)]. La ecuación (3.15) es una *fórmula generalizada de la torsión* y de nuevo se observa que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia radial desde el centro de la barra.

Ángulo de torsión

Ahora podemos relacionar el ángulo de torsión de una barra de material linealmente elástico con el par de torsión aplicado T. Al combinar la ecuación (3.9a) con la fórmula de la torsión se obtiene

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \tag{3.16}$$

en la cual θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud. Esta ecuación muestra que la razón de torsión θ es directamente proporcional al par de torsión T e inversamente proporcional al producto GI_P, conocido como **rigidez torsional** de la barra.

Para una barra en **torsión pura**, el ángulo de torsión ϕ total, igual a la razón de torsión multiplicada por la longitud de la barra (es decir, $\phi = \theta L$), es

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \tag{3.17}$$

en la cual ϕ se mide en radianes. El uso de las ecuaciones anteriores tanto en análisis como en diseño se ilustra más adelante en los ejemplos 3.1 y 3.2.

La cantidad GI_P/L, llamada **rigidez torsional** de la barra, es el par de torsión necesario para producir una rotación de un ángulo unitario. La **flexibilidad torsional** es el recíproco de la rigidez, o L/GI_P, y se define como el ángulo de rotación producido por un par de torsión unitario. Por lo tanto, tenemos las expresiones siguientes:

$$k_T = \frac{GI_P}{L} \qquad f_T = \frac{L}{GI_P} \tag{3.18a,b}$$

Estas cantidades son análogas a la rigidez axial $k = EA/L$ y a la flexibilidad axial $f = L/EA$ de una barra en tensión o compresión [compare con las ecuaciones (2.4a) y (2.4b)]. Las rigideces y flexibilidades desempeñan papeles importantes en el análisis estructural.

La ecuación para el ángulo de torsión [ecuación (3.17)] proporciona una forma conveniente para determinar el módulo de elasticidad en cortante G de un material. Al realizar una prueba de torsión en una barra circular podemos medir el ángulo de torsión ϕ producido por un par de torsión conocido T. Luego se puede calcular el valor de G con la ecuación (3.17).

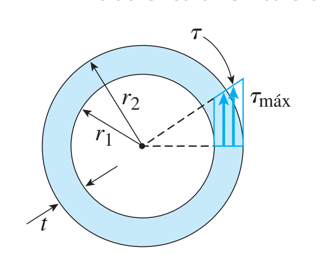
Tubos circulares

Los tubos circulares resisten con más eficiencia las cargas torsionales que las barras sólidas. Como sabemos, los esfuerzos cortantes en una barra circular sólida son máximos en el borde exterior de la sección transversal y cero en el centro. Así, la mayor parte del material en un eje sólido se somete a un esfuerzo significativamente menor que el esfuerzo cortante máximo. Además, los esfuerzos cerca del centro de la sección transversal tienen un brazo de momento menor ρ que debe considerarse en la determinación del par de torsión [vea la figura 3.9 y la ecuación (3.10)].

En contraste, en un tubo hueco común la mayor parte del material está cerca del borde exterior de la sección transversal donde los esfuerzos cortantes y brazos de momento son mayores (figura 3.10). Por lo tanto, si en una aplicación es importante reducir peso y ahorrar material, se aconseja emplear un tubo circular. Por ejemplo, los ejes de impulsión largos, los ejes de hélices y los ejes de generadores usualmente tienen secciones transversales huecas.

Figura 3.10

Tubo circular en torsión



El análisis de la torsión de un tubo circular es casi idéntico al de una barra sólida. Se pueden emplear las mismas expresiones básicas para los esfuerzos cortantes [por ejemplo, las ecuaciones (3.9a) y (3.9b)]. Por supuesto, la distancia radial ρ está limitada al intervalo r_1 a r_2, donde r_1 es el radio interior y r_2 el radio exterior de la barra (figura 3.10).

La relación entre el par de torsión T y el esfuerzo máximo está dada por la ecuación (3.10), pero los límites en la integral para el momento polar de inercia [ecuación (3.11)] son $\rho = r_1$ y $\rho = r_2$. Así, el momento polar de inercia del área de la sección transversal de un tubo es

$$I_P = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) \qquad \textbf{(3.19)}$$

Las expresiones anteriores también se pueden escribir de las siguientes formas:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2}(4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4}(d^2 + t^2) \qquad \textbf{(3.20)}$$

donde r es el *radio promedio* del tubo, igual a $(r_1 + r_2)/2$; d el *diámetro promedio*, igual a $(d_1 + d_2)/2$, y t el *espesor de pared* (figura 3.10), igual a $r_2 - r_1$. Por supuesto, las ecuaciones (3.19) y (3.20) dan los mismos resultados, pero en ocasiones la segunda es más conveniente.

Si el tubo es relativamente delgado, de tal modo que el espesor de pared t es pequeño en comparación con el radio promedio r, podemos ignorar los términos t^2 en la ecuación (3.20). Con esta simplificación obtenemos las *fórmulas aproximadas* siguientes para el momento polar de inercia:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Estas expresiones se dan en el caso 22 del apéndice E.

Recordatorios: En las ecuaciones (3.20) y (3.21), las cantidades r y d son el radio y el diámetro promedio, no los máximos. Además, las ecuaciones (3.19) y (3.20) son exactas; la ecuación (3.21) es aproximada.

La fórmula de la torsión [ecuación (3.13)] se puede emplear para un tubo circular de material linealmente elástico siempre que I_P se evalúe con base en la ecuaciones (3.19), (3.20) o, si es apropiado, con la ecuación (3.21). Los mismos comentarios aplican a la ecuación general del esfuerzo cortante [ecuación (3.15)], a las ecuaciones para la razón de torsión y el ángulo de torsión [ecuaciones (3.16) y (3.17)], y a las ecuaciones para la rigidez y flexibilidad [ecuaciones (3.18a) y 3.18b)].

La distribución del esfuerzo cortante en un tubo se representa en la figura 3.10, donde se observa que el esfuerzo promedio en un tubo delgado es casi tan grande como el esfuerzo máximo. Esto significa que en una barra hueca se utiliza el material de manera más eficiente que en una barra sólida, como se explicó antes, y se demuestra más adelante en los ejemplos 3.2 y 3.3.

Al diseñar un tubo circular para transmitir un par de torsión, debemos asegurarnos de que el espesor t es suficientemente grande para evitar el arrugamiento o pandeo de la pared del tubo. Por ejemplo, se puede especificar un valor máximo de la razón entre el radio y el espesor, como $(r_2/t)_{\text{máx}} = 12$. Otras consideraciones incluyen los factores ambientales y de durabilidad, que también imponen requerimientos para el espesor mínimo de la pared del tubo. Estos temas se estudian en cursos y libros de texto sobre diseño mecánico.

Limitaciones

Las ecuaciones que se deducen en esta sección se limitan a barras con sección transversal circular (sólidas o huecas) que se comportan de manera linealmente elástica. En otras palabras, las cargas deben ser tales que los esfuerzos no sobrepasen el límite de proporcionalidad del material. Además, las ecuaciones para esfuerzos son válidas sólo en partes de las barras alejadas de concentraciones de esfuerzos (como agujeros y otros cambios abruptos de la forma) y alejadas de las secciones transversales donde se aplican las cargas. (Las concentraciones de esfuerzos en torsión se analizan más adelante en la sección 3.12.)

Por último, es importante hacer énfasis en que las ecuaciones para la torsión de barras y tubos circulares no se pueden utilizar para barras que tengan otras formas. Las barras no circulares, como las rectangulares y las que tienen secciones transversales en forma de "I", se comportan de manera muy diferente a las barras circulares Por ejemplo, sus secciones transversales *no* permanecen planas y sus esfuerzos máximos *no* se ubican en las distancias más alejadas de los puntos medios de las secciones transversales. Entonces, estas barras requieren métodos de análisis más avanzados, como los que se presentan en libros sobre teoría de elasticidad y mecánica de materiales avanzada.* (Se presenta una breve perspectiva general de la torsión de ejes prismáticos no circulares en la sección 3.10.)

*** La teoría de la torsión para barras circulares se originó con el trabajo del famoso científico francés C. A. de Coulomb (1736-1806); se atribuyen desarrollos adicionales a Thomas Young y a A. Duleau (referencia 3.1). La teoría general de la torsión (para barras de cualquier forma) se debe al más famoso investigador de la elasticidad de todos los tiempos, Barré de Saint-Venant (1797-1886); consulte la referencia 2.10.**

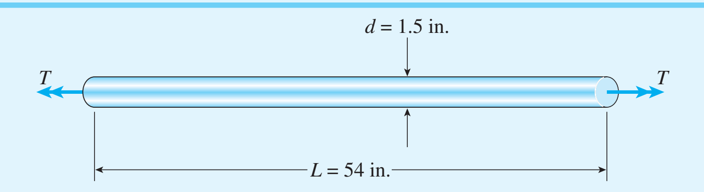
Ejemplo 3.1

Una barra sólida de acero con sección transversal circular (figura 3.11) tiene un diámetro $d = 1.5$ in., longitud $L = 54$ in. y módulo de elasticidad en cortante $G = 11.5 \times 10^6$ psi. La barra está sometida a pares de torsión T que actúan en sus extremos.

a) Si los pares de torsión tienen una magnitud $T = 250$ lb-ft, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en la barra? ¿Cuál es el ángulo de torsión entre los extremos?
b) Si el esfuerzo cortante permisible es de 6000 psi y el ángulo de torsión permisible es de 2.5°, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible?

Figura 3.11

Ejemplo 3.1: Barra en torsión pura



Solución

a) *Esfuerzo cortante máximo y ángulo de torsión.* Dado que la barra tiene una sección transversal circular sólida, podemos determinar el esfuerzo cortante con la ecuación (3.14), de la siguiente manera:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in./ft})}{\pi(1.5 \text{ in.})^3} = 4530 \text{ psi}$$

De manera similar, el ángulo de torsión se obtiene con la ecuación (3.17) con el momento polar de inercia dado por la ecuación (3.12):

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(1.5 \text{ in.})^4}{32} = 0.4970 \text{ in.}^4$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} = \frac{(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in./ft})(54 \text{ in.})}{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in.}^4)} = 0.02834 \text{ rad} = 1.62°$$

Por lo tanto, el análisis de la barra ante la acción del par de torsión dado está completo.

b) *Par de torsión máximo*. El par de torsión máximo se determina mediante el esfuerzo cortante permisible, o bien por el ángulo de torsión permisible. Iniciando con el esfuerzo cortante, reacomodamos la ecuación (3.14) y el cálculo es el siguiente:

$$T_1 = \frac{\pi d^3 \tau_{\text{perm}}}{16} = \frac{\pi}{16}(1.5 \text{ in.})^3(6000 \text{ psi}) = 3980 \text{ lb-in.} = 331 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que este valor resultará en un esfuerzo cortante que rebasará el esfuerzo permisible de 6000 psi.

Si se utiliza la ecuación (3.17) reacomodada, ahora podemos calcular el par de torsión con base en el ángulo de torsión:

$$T_2 = \frac{GI_P\phi_{\text{perm}}}{L} = \frac{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in.}^4)(2.5°)(\pi \text{rad}/180°)}{54 \text{ in.}}$$
$$= 4618 \text{ lb-in.} = 385 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que T_2 dará por resultado un ángulo de torsión mayor que el permisible.

El par de torsión máximo es el menor entre T_1 y T_2:

$$T_{\text{máx}} = 331 \text{ lb-ft}$$

En este ejemplo, el esfuerzo cortante permisible proporciona la condición limitante.

Ejemplo 3.2



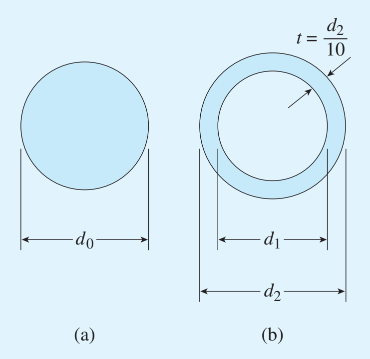
(© culture-images GmbH/Alamy)

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida, o bien como un tubo circular (figura 3.12). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de 0.75°/m. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es de 78 GPa.)

a) Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.
b) Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.
c) Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d_2/d_0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.

Figura 3.12

Ejemplo 3.2: Torsión de un eje de acero



Solución

a) *Eje sólido.* El diámetro requerido d_0 se determina a partir del esfuerzo cortante permisible, o bien, de la razón de torsión permisible. En el caso del esfuerzo cortante permisible, reacomodamos la ecuación (3.14) y obtenemos

$$d_0^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{perm}} = \frac{16(1200\ \text{N}\cdot\text{m})}{\pi(4\ \text{MPa})} = 152.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

de donde se obtiene

$$d_0 = 0.0535\ \text{m} = 53.5\ \text{mm}$$

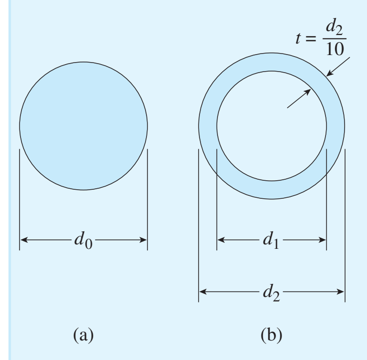
En el caso de la razón de torsión permisible, comenzamos por determinar el momento polar de inercia que se requiere [vea la ecuación (3.16)]:

$$I_P = \frac{T}{G\theta_{perm}} = \frac{1200\ \text{N}\cdot\text{m}}{(78\ \text{GPa})(0.75°/\text{m})(\pi\text{rad}/180°)} = 1175 \times 10^{-9}\ \text{m}^4$$

Continúa

Ejemplo 3.2 - *Continuación*

Figura 3.12 (Repetida)



Como el momento polar de inercia es igual a $\pi d^4/32$, el diámetro necesario es

$$d_0^4 = \frac{32 I_P}{\pi} = \frac{32(1175 \times 10^{-9}\ \text{m}^4)}{\pi} = 11.97 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

o

$$d_0 = 0.0588\ \text{m} = 58.8\ \text{mm}$$

Al comparar los dos valores de d_0, se observa que la razón de torsión gobierna el diseño, y el diámetro necesario del eje sólido es

$$d_0 = 58.8\ \text{mm}$$



En un diseño práctico, seleccionaríamos un diámetro ligeramente mayor que el valor calculado de d_0; por ejemplo, 60 mm.

b) *Eje hueco*. De nuevo, el diámetro requerido se basa en el esfuerzo cortante permisible, o bien en la razón de torsión permisible. Comenzamos por observar que el diámetro exterior de la barra es d_2 y el diámetro interior es

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1d_2) = 0.8d_2$$

Por consiguiente, el momento polar de inercia [ecuación (3.19)] es

$$I_P = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - (0.8d_2)^4\right] = \frac{\pi}{32}(0.5904d_2^4) = 0.05796d_2^4$$

En el caso del esfuerzo cortante permisible, se utiliza la fórmula de la torsión [ecuación (3.13)] como

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{T(d_2/2)}{0.05796d_2^4} = \frac{T}{0.1159d_2^3}$$

Si se reacomodan los términos, se obtiene

$$d_2^3 = \frac{T}{0.1159\tau_{\text{perm}}} = \frac{1200\ \text{N}\cdot\text{m}}{0.1159(40\ \text{MPa})} = 258.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Resolviendo para d_2 da

$$d_2 = 0.0637\ \text{m} = 63.7\ \text{mm}$$

que es el diámetro exterior necesario con base en el esfuerzo cortante.

En el caso de la razón de torsión permisible, utilizamos la ecuación (3.16) reemplazando q con θ_{perm} e I_p con la expresión que se obtuvo antes; por lo tanto,

$$\theta_{\text{perm}} = \frac{T}{G(0.05796d_2^4)}$$

de donde

$$d_2^4 = \frac{T}{0.05796G\theta_{perm}}$$

$$= \frac{1200 \text{ N}\cdot\text{m}}{0.05796(78 \text{ GPa})(0.75°/\text{m})(\pi \text{rad}/180°)} = 20.28 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Resolviendo para d_2 obtenemos

$$d_2 = 0.0671 \text{ m} = 67.1 \text{ mm}$$

que es el diámetro necesario con base en la razón de torsión.

Al comparar los dos valores de d_2, se observa que la razón de torsión gobierna el diseño, y el diámetro exterior necesario del eje hueco es

$$d_2 = 67.1 \text{ mm}$$

El diámetro interior d_1 es igual a $0.8d_2$, o 53.7 mm. (Como valores prácticos, podríamos seleccionar $d_2 = 70$ mm y $d_1 = 0.8d_2 = 56$ mm.)

c) *Razones de diámetros y pesos.* La razón entre el diámetro exterior del eje hueco y el diámetro del eje sólido (empleando los valores calculados) es

$$\frac{d_2}{d_0} = \frac{67.1 \text{ mm}}{58.8 \text{ mm}} = 1.14$$

Como los pesos de los ejes son proporcionales a las áreas de sus secciones transversales, podemos expresar la razón entre el peso del eje hueco y el peso del eje sólido como sigue:

$$\frac{W_H}{W_S} = \frac{A_H}{A_S} = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)/4}{\pi d_0^2/4} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_0^2}$$

$$= \frac{(67.1 \text{ mm})^2 - (53.7 \text{ mm})^2}{(58.8 \text{ mm})^2} = 0.47$$

Estos resultados muestran que para el eje hueco sólo se requiere 47% del material necesario para el eje sólido, en tanto que el diámetro exterior es sólo 14% mayor.

Nota: Este ejemplo muestra cómo determinar los tamaños necesarios de las barras sólidas y los tubos circulares cuando se conocen los esfuerzos permisibles y las razones de torsión permisibles. También ilustra el hecho de que los tubos circulares utilizan el material de manera más eficiente que las barras sólidas circulares.



LA OCTAVA EDICIÓN DE MECÁNICA DE MATERIALES CONTINÚA SU TRADICIÓN COMO EL LIBRO LÍDER DE ESTA MATERIA EN EL MERCADO.

Gracias a su claridad y precisión que le han caracterizado a lo largo de su enorme trayectoria, favorece la comprensión del lector, así como sus habilidades de análisis y solución de problemas. Entre los temas centrales que se estudian, se encuentran el análisis y diseño de los miembros estructurales sujetos a fuerzas de tensión, compresión, torsión y flexión.

El libro incluye mucho más contenido del que puede impartirse en un solo curso, lo que brinda a los docentes la oportunidad de seleccionar los temas que desean abarcar, al tiempo que reservan el material restante como referencia valiosa para el estudiante.

ENTRE LAS CARACTERÍSTICAS DE ESTA EDICIÓN, DESTACAN LAS SIGUIENTES:

• **GRAN CANTIDAD DE PROBLEMAS DE DISTINTA ÍNDOLE:** Se incluyen más de 1,000 problemas para realizar como tarea, o bien, para resolverlos en discusiones en clase. Los ejercicios se agrupan con base en el grado de dificultad y se ubican al final del capítulo.

• **NUMEROSOS EJEMPLOS:** Una gran cantidad de ejemplos ilustran los conceptos teóricos y muestran cómo aplicarlos en situaciones prácticas. En algunos casos se incorporan fotografías para mostrar estructuras o componentes actuales de ingeniería, con la finalidad de reforzar el vínculo entre la teoría y la práctica.

• **MÉTODO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PASO A PASO**. En esta edición se implementa un método detallado para resolver problemas, el cual enfatiza los conceptos fundamentales.

• **NUEVA SECCIÓN EN EL CAPÍTULO 1:** Para apoyar al estudiante en la transición de su curso de Estática al de Mecánica de materiales, se incorpora una sección nueva en la que se revisan los conceptos fundamentales del equilibrio y se aplican a la solución de problemas representativos, como los que se encontrarán en capítulos posteriores.





ISBN-13: 978-607-522-281-3
ISBN-10: 607-522-281-2